4 種 4 項平均の反復極限定理の代数幾何学的側面

中野 竜之介

北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程 2 年

上の QR コードから該当の講演スライドが閲覧できます.

This work was supported by JST SPRING, Grant Number JPMJSP2119.

記号の定義

記号の定義 I

定義 1

$$\vartheta_{a,b}(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\left(\pi i(n+\tfrac{1}{2}a)\tau\,{}^t(n+\tfrac{1}{2}a) + 2\pi i(z+\tfrac{1}{2}b)\,{}^t(n+\tfrac{1}{2}a)\right)$$

- $a, b \in \mathbb{Z}^g$
- $\tau = (\tau_{jk})_{jk} \in \mathfrak{S}_g$: $g \times g$ の対称複素行列で, 虚部が正定値なもの
- $z = (z_1, \ldots, z_g) \in \mathbb{C}^g$: 複素変数
- $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$: 指標

特別な場合:

- $g = 1$: Jacobi テータ関数 ($\mathfrak{S}_1 = \mathbb{H}$: 上半平面)
- $g \geq 2$: Riemann テータ関数 ($\mathfrak{S}_g$: Siegel 上半空間)
- $z = 0$: テータ定数, $\vartheta_{a,b}(\tau)$

記号の定義 II

定義 2 (Gauss hypergeometric series)

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}z^n,$$

- $(\alpha,n)=\Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$
- $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C},\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$

定義 3 (Lauricella hypergeometric series F_D)

$$F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n_1,\ldots,n_m\geq 0}^{\infty}\frac{(\alpha,\sum_{j=1}^m n_j)\prod_{j=1}^m(\beta_j,n_j)}{(\gamma,\sum_{j=1}^m n_j)\prod_{j=1}^m(1,n_j)}\prod_{j=1}^m z_j^{n_j},$$

- $z=(z_1,\ldots,z_m),\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_m)\in\mathbb{C}^m$
- $|z_j|<1\ (j=1,\ldots,m)$
- $\alpha,\gamma\in\mathbb{C},\ \gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$

Fact (Borwein の算術幾何平均 (Arithmetic-Geometric Mean, AGM))

$0 < b_0 \leq a_0$ とするとき, 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2} b_n},$$

によって定まる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限 $M_{\mathrm{Bor}}(a_0, b_0)$ に収束する.

$$\alpha(\sigma) = \vartheta_{00}(\sigma)^4 + \vartheta_{10}(\sigma)^4, \quad \beta(\sigma) = \vartheta_{00}(\sigma)^4 - \vartheta_{10}(\sigma)^4,$$

$$\alpha(2\sigma) = \frac{\alpha(\sigma) + 3\beta(\sigma)}{4}, \quad \beta(2\sigma) = \sqrt{\frac{\alpha(\sigma) + \beta(\sigma)}{2} \beta(\sigma)},$$

何かしらの変換で平均と一致するような変換則を持つ保型関数があるとき, AGM はその保型関数で記述される (後述)

J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991 II

$$\alpha(\sigma) = \vartheta_{00}(\sigma)^4 + \vartheta_{10}(\sigma)^4, \quad \beta(\sigma) = \vartheta_{00}(\sigma)^4 - \vartheta_{10}(\sigma)^4,$$

命題 5

$0 < b_0 \leq a_0$ に対し,

$$\sigma = \sqrt{2}i \frac{F(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; \frac{b_0^2}{a_0^2})}{F(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 1 - \frac{b_0^2}{a_0^2})}$$

とするとき,

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{Bor}}(a_0, b_0)} = F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1; 1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}\right)^2 = \underbrace{\vartheta_{00}(\sigma)^4 + \vartheta_{10}(\sigma)^4}_{=\alpha(\sigma)}.$$

Kato and Matsumoto 2009

Kato and Matsumoto 2009 I

$0 < d_0 \leq c_0 \leq b_0 \leq a_0$ に対し 4 種類の 4 項平均

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + d_n}{2}\frac{b_n + c_n}{2}},$$

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + c_n}{2}\frac{b_n + d_n}{2}}, \qquad d_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n + b_n}{2}\frac{c_n + d_n}{2}},$$

によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ は共通の極限 $M_{\mathrm{Mat}}(a_0, b_0, c_0, d_0)$ に収束する.

- $M_{\mathrm{Mat}}(a_0, b_0, b_0, b_0) = M_{\mathrm{Bor}}(a_0, b_0)$.

Fact (Kato and Matsumoto 2009, Theorem 1.)

$0 < y_3 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1$ に対し次が成立:

$$\frac{1}{M_{\mathrm{Mat}}(1, y_1, y_2, y_3)} = F_D\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1; 1 - y_1^2, 1 - y_2^2, 1 - y_3^2\right)^2,$$

主定理

1. 背景
   - 記号の定義
   - J. M. Borwein and P. B. Borwein 1991
   - Kato and Matsumoto 2009
2. 本編
   - 主定理

主定理 I

$$C(x)\colon w^4 = z(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)(z-1) \quad (x=(x_1,x_2,x_3))$$
ただし, $x \in X = \{(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_j \neq z_k,\ z_1,z_2,z_3 \neq 0,1\}$.

次を構成した:

1. 周期写像 $per\colon X \to \mathbb{B}_3 = \left\{v \in \mathbb{P}^3 \mid v^* U v < 0\right\}$, $U = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \oplus I_2$.
2. 保型埋込 $\imath\colon \mathbb{B}_3 \ni v \mapsto iU\left(I_4 - \frac{2}{{}^t v U v} v\, {}^t v U\right) \in \mathfrak{S}_4$
3. $\mathbb{B}_3$ 上のモノドロミー群 Γ に関する保型関数 $a(v), b_1(v), b_2(v), b_3(v)$

$$per^{-1}(v) = \left(1 - \frac{b_1(v)^2}{a(v)^2}, 1 - \frac{b_2(v)^2}{a(v)^2}, 1 - \frac{b_3(v)^2}{a(v)^2}\right)$$

4. テータ定数と ${}^t v U v$ の等式 (Thomae 型公式)

主定理 II

定理 7 (M., N.)

$v = per(x_1, x_2, x_3)$, $\tau = \imath(v)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} a(v) &= \vartheta_{0000,0000}(N\cdot\tau)^2 + \vartheta_{1100,0000}(N\cdot\tau)^2, \\ b_1(v) &= \vartheta_{0000,0000}(N\cdot\tau)^2 - \vartheta_{1100,0000}(N\cdot\tau)^2, \\ b_2(v) &= \vartheta_{0000,1100}(N\cdot\tau)^2 + \vartheta_{1111,1111}(N\cdot\tau)^2, \\ b_3(v) &= \vartheta_{0000,1100}(N\cdot\tau)^2 - \vartheta_{1111,1111}(N\cdot\tau)^2. \end{aligned}$$

と，変換 $R = \dfrac{1}{1-i}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & -i \\ & & -i & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(3,1)$ が $M_{\mathrm{Mat}}(a_0, b_0, c_0, d_0)$ を与える保型関数と変換である．

- $b_j(v)^2/a(v)^2 = 1 - x_j$

主定理 III

$M_{\mathrm{Mat}}(a_0, b_0, c_0, d_0)$ を与える保型関数と変換であるとは即ち

$$
\begin{aligned}
a(Rv) &= \frac{a(v) + b_1(v) + b_2(v) + b_3(v)}{4} \\
b_1(Rv) &= \frac{\sqrt{(a(v) + b_3(v))(b_1(v) + b_2(v))}}{2} \\
b_2(Rv) &= \frac{\sqrt{(a(v) + b_2(v))(b_1(v) + b_3(v))}}{2} \\
b_3(Rv) &= \frac{\sqrt{(a(v) + b_1(v))(b_2(v) + b_3(v))}}{2}
\end{aligned}
$$

を満たすことである．ここでは条件 $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$ を課す．

主定理 IV

定理 8 (M., N. 主定理 1)

$a_0 \geq b_0 \geq c_0 \geq d_0 > 0$ とする.

- $y_1 = b_0/a_0$, $y_2 = c_0/a_0$, $y_3 = d_0/a_0$,
- $v = per(1-y_1^2, 1-y_2^2, 1-y_3^2)$,
- $\tau = \imath(v)$

$$\frac{a_0}{M_{\mathrm{Mat}}(a_0,b_0,c_0,d_0)} = \frac{\Gamma(3/4)^4}{\pi}\left(\vartheta_{0000,0000}(N\cdot\tau)^2 + \vartheta_{1100,0000}(N\cdot\tau)^2\right).$$

$$1-y_1^2 = 1-\frac{b_1(v)^2}{a(v)^2}, 1-y_2^2 = \frac{b_2(v)^2}{a(v)^2}, 1-y_3^2 = \frac{b_3(v)^2}{a(v)^2}$$

より,

$$y_1 = \frac{b_1(v)}{a(v)}, y_2 = \frac{b_2(v)}{a(v)}, y_3 = \frac{b_3(v)}{a(v)}$$

主定理 IV

Fact

$$M_{\mathrm{Mat}}(a_n, b_n, c_n, d_n) = M_{\mathrm{Mat}}(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1})$$
$$M_{\mathrm{Mat}}(ta_n, tb_n, tc_n, td_n) = tM_{\mathrm{Mat}}(a_n, b_n, c_n, d_n)\ (t > 0)$$

主定理 1 の証明：

$$\begin{aligned}
&M_{\mathrm{Mat}}(1, y_1, y_2, y_3) = M_{\mathrm{Mat}}(1, b_1(v)/a(v), b_2(v)/a(v), b_3(v)/a(v)) \\
=&\frac{1}{a(v)} M_{\mathrm{Mat}}(a(v), b_1(v), b_2(v), b_3(v)) \\
=&\frac{1}{a(v)} M_{\mathrm{Mat}}\left(a(Rv), b_1(Rv), b_2(Rv), b_3(Rv)\right) \\
=&\cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a(v)} M_{\mathrm{Mat}}\left(a(R^n v), b_1(R^n v), b_2(R^n v), b_3(R^n v)\right) \\
=&\frac{1}{a(v)} M_{\mathrm{Mat}}\left(\frac{\pi}{\Gamma(3/4)^4}, \frac{\pi}{\Gamma(3/4)^4}, \frac{\pi}{\Gamma(3/4)^4}, \frac{\pi}{\Gamma(3/4)^4}\right) = \frac{1}{a(v)} \frac{\pi}{\Gamma(3/4)^4}.
\end{aligned}$$

主定理 IV

$a_0 \geq b_0 \geq c_0 \geq d_0 > 0$ とする.

- $y_1 = b_0/a_0$, $y_2 = c_0/a_0$, $y_3 = d_0/a_0$,
- $v = per(1-y_1^2, 1-y_2^2, 1-y_3^2)$
- $\tau = \imath(v)$

定理 10 (M., N., 主定理 2)

$$\frac{\Gamma(3/4)^4}{\pi}\left(\vartheta_{0000,0000}(N\cdot\tau)^2 + \vartheta_{1100,0000}(N\cdot\tau)^2\right)$$
$$= F_D\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;1-y_1^2,1-y_2^2,1-y_3^2\right)^2.$$

定理 11

$$\frac{1}{M_{\mathrm{Mat}}(1,y_1,y_2,y_3)} = F_D\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;1-y_1^2,1-y_2^2,1-y_3^2\right)^2$$

参考文献

- Borwein, J. M. and P. B. Borwein (1991). "A cubic counterpart of Jacobi's identity and the AGM". In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 323.2, pp. 691–701. ISSN: 0002-9947,1088-6850. DOI: 10.2307/2001551. URL: https://doi.org/10.2307/2001551.
- Kato, T. and K. Matsumoto (2009). "The Common Limit of a Quadruple Sequence and the Hypergeometric Function F_D of Three Variables". In: *Nagoya Math. J.* 195, pp. 113–124.
- MATSUMOTO Keiji and NAKANO Ryunosuke (2025). *The algebro-geometric aspect of the iterated limit of a quaternary of means of four terms*. arXiv: 2512.22002 [math.AG]. URL: https://arxiv.org/abs/2512.22002.